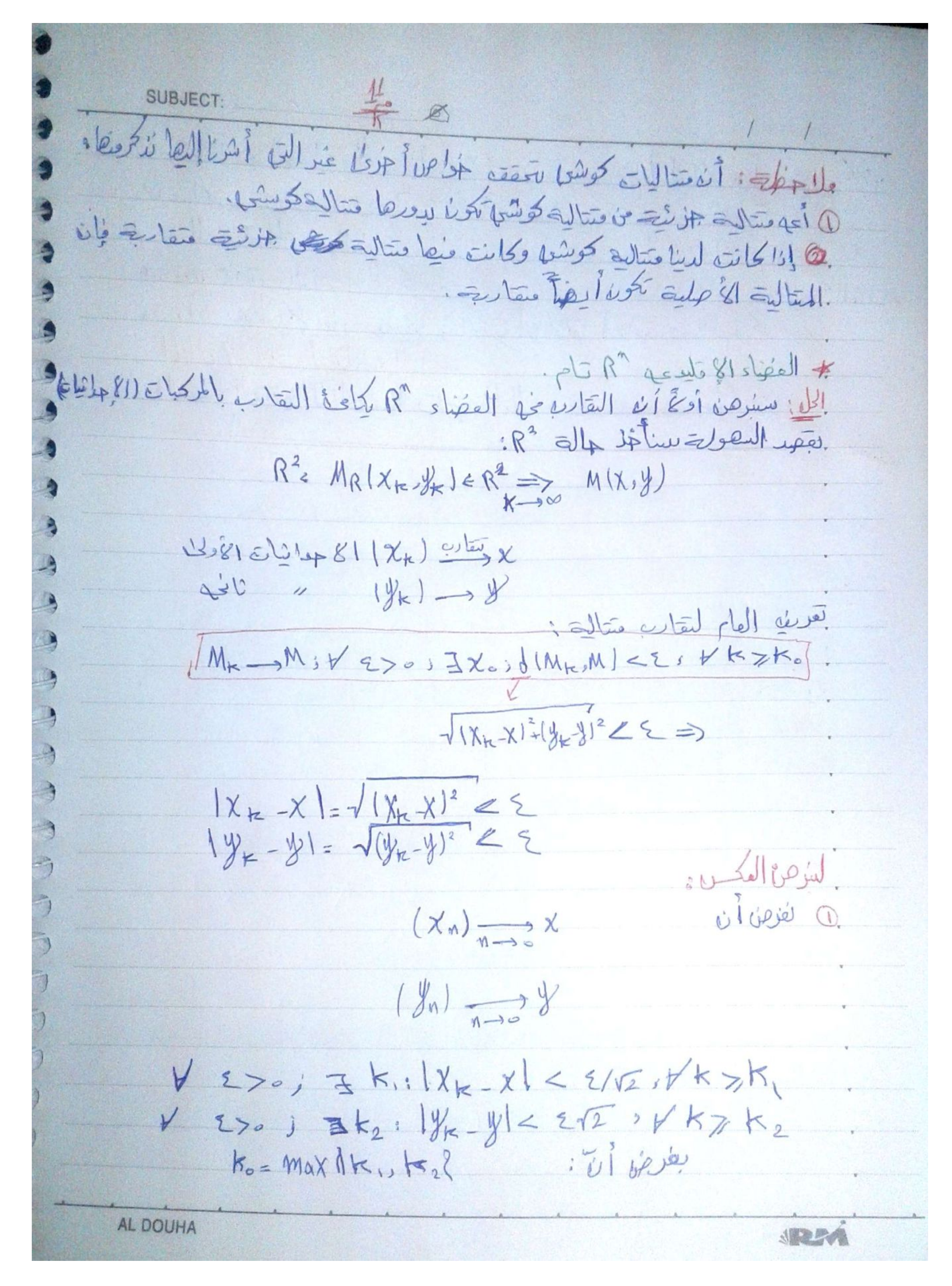




ملاحظة: أن متتاليات كوشي تحقق خواص أخرى غير التي أشرنا إليها نذكر منها:

① أي متتالية جزئية من متتالية كوشي تكون بدورها متتالية كوشي.

② إذا كانت لدينا متتالية كوشي وكانت منها متتالية جزئية متقاربة فإن المتتالية الأصلية تكون أيضاً متقاربة.

* الفضاء الإقليدي $R^n$ تام.

الحل: سنبرهن أولاً أن التقارب في الفضاء $R^n$ يكافئ التقارب بالمركبات (الإحداثيات)
بقصد السهولة سنأخذ حالة $R^2$:

$$R^2, \quad M_k(x_k, y_k) \in R^2 \underset{k\to\infty}{\Longrightarrow} M(x,y)$$

$(x_k) \xrightarrow{\text{تتقارب}} x$ الإحداثيات الأولى

$(y_k) \longrightarrow y$ " ثانية

تعريف العام لتقارب متتالية:

$$M_k \to M ; \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 ; d(M_k, M) < \varepsilon, \forall k \geq k_0$$

$$\sqrt{(x_k-x)^2+(y_k-y)^2} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|x_k - x| = \sqrt{(x_k-x)^2} < \varepsilon$$
$$|y_k - y| = \sqrt{(y_k-y)^2} < \varepsilon$$

لنبرهن العكس:

① نفرض أن

$$(x_n) \xrightarrow[n\to 0]{} x$$

$$(y_n) \xrightarrow[n\to 0]{} y$$

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists k_1 : |x_k - x| < \varepsilon/\sqrt{2}, \forall k \geq k_1$$
$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists k_2 : |y_k - y| < \varepsilon\sqrt{2}, \forall k \geq k_2$$

بفرض أن: $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$

SUBJECT:

فإنه باعتبار من العدد K تتحقق التراجحات السابقة معاً ونحو آن واحد وهذا يؤدي إلى أن.

$$\left.\begin{array}{l}(x_k-x)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}\\[2ex] (y_k-y)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}\end{array}\right\} \underset{\text{بالجمع}}{\Longrightarrow} (x_k-x)^2+(y_k-y)^2 < \varepsilon^2.$$

نجذر الطرفين :

$$|x_k-x|+|y-y_k| < \varepsilon$$

وذلك أننا أثبتنا :

$$\forall \varepsilon>0 ;\ \exists x_0 ,\ d(M_k, M) < \varepsilon ;\quad \forall x \geq k.$$

الخطوة الثانية : لنثبت أن $R^2$ تام

لنأخذ متتالية كوشية كيفية من $R^2$

وهذا يؤدي أن $\Leftarrow$ $(x_k)$ متتالية كوشي من $R$.

وبما أن $(x_k)$ متتالية كوشية من $R$.

$(y_k)$ " " " " "

$(x_k) \longrightarrow x \qquad M_k \longrightarrow M(x, y)$

$(y_k) \longrightarrow y$

$\Leftarrow$ إذاً $R^2$ تام وبطريقة مماثلة نبرهن أن $R^n$ متقارب مهما تكن $n$.

---

مثال: لنأخذ الفضاء $C[a,b]$ تام

فإن :

$$d(f,g) = \max_{a \leq x < b} \{|f(x)-g(x)|\}$$

ويعود سبب هو أن التقارب في هذا الفضاء هو تقارب منتظم.

«كل متتالية من دوال المستمرة متقاربة بانتظام تتقارب إلى دالة مستمرة»

---

ملاحظة: «كل متتالية ثابتة هي متقاربة». $\Leftarrow$ الفضاء تام

SUBJECT:

مثال: الفضاء المتري المتقطع $(X,d)$ تام:

$(X,d)$ المتقطع

$(x_n)$ كوشي

$\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon \; ; \; \forall n, m > n_0$

مثلاً $\varepsilon = \frac{1}{10}$ $\quad d(x_n, x_m) < \frac{1}{10} \quad \forall n, m \geq n_0$

$d(x_n, x_m) = 0 \iff x_n = x_m \; ; \; \forall n, m \geq n_0$

هذا يعني أن متتالية كوشي ثابتة اعتباراً من الحد $n_0$.

مبرهنة: ليكن $A$ فضاء جزئي من الفضاء $X$ تاماً، يكون الفضاء الجزئي $A$ تاماً إذا وفقط إذا كانت المجموعة $A$ مغلقة.

البرهان:

* لزوم الشرط: نفرض أن $A$ تام ولنفرض أن $x \in \bar{A}$ نقطة لاصقة "كيفية"
حسب مبرهنة سابقة: توجد متتالية $(x_n)$ من عناصر $A$ متقاربة من $x$ بما أنها متقاربة فهي متتالية كوشي.
بما أنه $A$ تام من الفرض $\Leftarrow$ $x \in A$ $\Leftarrow$ $\bar{A} \subseteq A$
إذاً هي مجموعة مغلقة.

* كفاية الشرط: نفرض أن $A$ مغلقة
لنأخذ متتالية كوشي كيفية من $A$، بما أن $A$ جزء من $x$ إذاً $(x_n)$ متتالية كوشي من $X$، وبما أن $X$ تام فإنها متقاربة من عنصر ما وليكن $x$ $(x_n \to x)$

حسب المبرهنة السابقة فإن $x$ نقطة لاصقة، ولما كانت $A$ مغلقة فهي تحوي جميع نقاطها اللاصقة $\Leftarrow$ $x \in A$ إذاً $A$ تام

مثال للتوضيح هام: $\mathbb{R}$ $\quad A = ]0,1]$ هل الفضاء $A$ تام أم لا.
الجواب: لا، لأن $A$ غير مغلقة

ط: حسب التعريف،

متتالية كيفية $x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \notin A$

فإن A ليس تام لأن 0 ليس من مجموعة التعريف.

ملاحظة: { يمكن تصحيح أي فضاء متري غير تام إلى فضاء متري تام ؛ يمكن نظر إلى فضاء متري غير تام على أنه فضاء جزئي من فضاء تام } إمكانية الإتمام

---

## الفصل الثالث 3

* التطبيقات المستمرة: ليكن $(X,d)$ و $(Y,d')$ ، $f$ و $x_0 \in X$ نقطة من المنطلق. نقول عن تطبيق $f$ أنه مستمر في النقطة $x_0$ إذا كان:

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0 : d(x,x_0)<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

* تعريف مكافئ: نقول عن $f$ أنه مستمر في نقطة $x_0$ إذا كان من أجل أي كرة مفتوحة $B(f(x_0),\varepsilon)$ توجد كرة مفتوحة $B(x_0,\delta)$ بحيث

$$f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$$

* تعريف مكافئ آخر «طبولوجي»: نقول عن تطبيق $f$ أنه مستمر في نقطة $x_0$ إذا كان من أجل أي جوار $v$ لنقطة $f(x_0)$ فإنه يوجد جوار $u$ لنقطة $x_0$ في $X$ بحيث $f(u) \subseteq v$.

---